

具有不同借贷利率的幂型欧式期权定价的鞅方法

张淑娟, 孔繁亮

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要:在借贷利率不同条件下,利用鞅分析方法推导了期权到期时刻支付函数为幂型的欧式期权定价公式,是对借贷利率相同与支付函数为线性条件下结果的推广.这里假定无风险利率,股票预期收益率,股票波动率以及股票红利率都是时间的确定性函数.

关键词:借贷利率;幂型欧式期权;等价鞅测度

中图分类号: O211.6; F830.9 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2009)05-0093-04

Martingale Method of the Power Payoffs European Options Pricing with Different Borrow-Lending Interest Rate

ZHANG Shu-juan, KONG Fan-liang

(School of Applied Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Assuming borrow-lending interest rate is different, we discuss the pricing formulas of power payoffs European options at the time of maturity of options by applying the martingale method, and extend the results of same borrow-lending interest rate and linear payment. The risk-free rate of interest, the expected rate of return, the volatility for the stock price and the dividend of the stock price are deterministic functions of the time.

Key words: borrow-lending interest rate; power payoffs European options; equivalent martingale measures

0 引 言

早在 70 年代, F. Black 和 M. Scholes 就得到了欧式期权定价的解析表达式,从此以后,关于期权定价理论和实证研究得到迅速发展,很多文献讨论的是期权到期时刻标准的欧式期权的支付函数为股价的线性函数,但在金融工程实务和理论中存在这样形式的支付函数: $[h(s(T)) - K]^+$, 这里 $h(\cdot)$ 是单增函数, T 是期权到期时刻, $K > 0$ 是期权执行价格. 文 [1] 在支付函数形如 $h(x) = x^\alpha$ ($\alpha > 0$) 的情况下得到了相应的欧式期权定价公式, 文 [2] 讨论了在借贷利率不同时支付函数为 $s(T)$ 时欧式期权

定价, 本文在借贷利率不同情况下, 运用鞅分析方法^[6-8]推导出幂型欧式期权的定价公式, 进一步推广了文 [1] 与文 [2] 的结论, 也是对 Black-Scholes^[4] 欧式期权的定价公式的推广.

1 金融市场模型

假定金融市场 M 中有两种证券: 一种是无风险资产, 称为债券 (或银行帐户), 另一种是风险资产称为股票. 设 (Ω, F, P_t) 是一个具有 σ -流概率空间, F_t 由标准 Brown 运动 $W(t)$ 产生的自然 σ -流, 股票价格满足方程

$$dS(t) = S(t) \{ (u(t) - q(t)) dt + \sigma(t) dW(t) \}$$

收稿日期: 2007-12-27

基金项目: 国家自然科学基金项目 (10771046); 黑龙江省教育厅科学技术研究项目 (11511092)

作者简介: 张淑娟 (1982—) 女, 硕士研究生, E-mail: zhangshujuanya@126.com;

孔繁亮 (1948—) 男, 教授, 硕士生导师.

其中: $u(t)$ 为股票的瞬时期望收益率; $\sigma(t)$ 为股票的瞬时波动率; $q(t)$ 为股票支付连续红利率. 债券价格满足

$$dB(t) = B(t)r(t)dt, B(0) = 1$$

银行贷款满足

$$d\beta(t) = \beta(t)R(t)dt, \beta(0) = 1$$

投资者在 t 时刻财富过程 $\pi(t)$ 满足

$$\pi(t) = a(t)S(t) + b^+(t)B(t) - b^-(t)\beta(t);$$

假定 $\pi(t)$ 是循序可测, 并且 $E \int_0^T \sigma^2(t)dt < \infty$, 其

中 $a(t)$ 为投资者 t 时刻持有股票数目, $b^+(t)$ 与 $b^-(t)$ 分别为持有债券和从银行贷款的数目, $b(t) = b^+(t) - b^-(t)$. 当 $a(t)$ 为负值时, 表示卖空股票, 当 $b(t)$ 为正值时, $\pi(t) - S(t)a(t)$ 表示投资者 t 时刻投资在债券上的财富数量, 当 $b(t)$ 为负值时, $a(t)S(t) - \pi(t)$ 表示投资者以利率 $R(t)$ ($R(t) > r(t)$) 从银行贷款的数量. 本文假设在期权有效期内, 市场没有任何交易费用和税收, 无套利机会, 交易能够连续进行, 允许卖空且标的资产的数量是可分的, 所有投资为自融资策略^[3], 自融资策略即在整个进行交易的时段内, 投资人在决定投资策略后, 没有加入新资金, 也没有资金被抽走.

2 主要结果及证明

引理 (Cameron-Martin-Girsannov 定理)^[5] 设 W_t 是一个 P -布朗运动, γ_t 是一个 F -可料过程, 如果

$$E_P \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right] \right\} < \infty, \text{ 则必存在一个测度 } Q \text{ 满足}$$

1) Q 是 P 等价的测度;

$$2) \frac{dQ}{dP} \Big|_{F_t} = \exp \left[-\int_0^t \gamma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s^2 ds \right];$$

$$3) W^Q(t) = W(t) + \int_0^t \gamma_s ds \text{ 是一个 } Q\text{-布朗运}$$

动, $W^Q(t) \sim N(0, t)$;

其中: $E_P(\cdot)$ 表示 P 测度下的期望; $E_Q(\cdot)$ 表示与 P 等价的测度 Q 下的期望.

在上述模型中, 由于存款与贷款利率不同, 所以在同一时刻不可能既存款又贷款.

当 $b(t)$ 为正值时, $\pi(t) = a(t)S(t) + b^+(t)B(t)$, 由于投资策略 $\{a(t), b^+(t)\}$ 是自融资策略, 因此财富过程满足

$$d\pi(t) = a(t)dS(t) + b^+(t)dB(t) + a(t)S(t)q(t)dt = \{r(t)\pi(t) + a(t)S(t)(u(t) - r(t))\}dt +$$

$$a(t)S(t)\sigma(t)dW(t)$$

$$\text{令 } \eta(t) = \frac{u(t) - r(t)}{\sigma(t)}, \text{ 若 } E_P \left[\exp \left\{ \int_0^T \frac{u(t) - r(t)}{\sigma(t)}^2 dt \right\} \right] <$$

∞ , 由引理知道存在唯一等价鞅测度 Q_1 满足 $\frac{dQ_1}{dP} =$

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^T \eta^2(s)ds - \int_0^T \eta(s)dW(s) \right], W^{Q_1}(t) = W(t) +$$

$\int_0^t \eta(s)ds$, $W^{Q_1}(t)$ 是关于 Q_1 的标准布朗运动, 则

$$d\pi(t) = r(t)\pi(t) + a(t)S(t)\sigma(t)\{\eta(t)dt + dW(t)\} = r(t)\pi(t) + a(t)S(t)\sigma(t)dW^{Q_1}(t).$$

于是在金融市场 M 中, 当财富过程 $\pi(t)$ 为幂型欧式看跌期权的定价 $p(t)$ 时有

$$p(t) = E_{Q_1} \left[\exp \left\{ -\int_t^T \eta(s)ds \right\} (K - S_T^a)^+ \mid F_t \right] = B^{-1}(T) E_{Q_1} [(K - S_T^a)^+ \mid F_t] \quad (1)$$

由于看涨期权预期将来的股价会下跌, 对于理性投资者来说不应全部持有股票, 而应部分持有债券, 所以 $b(t) > 0$, 因此在借贷利率不同情况下, 幂型欧式看跌期权的定价为式 (1).

当 $b(t)$ 为负值时, $\pi(t) = a(t)S(t) - \beta(t)b^-(t)$, 由于投资策略 $\{a(t), b^-(t)\}$ 是自融资策略, 因此财富过程满足

$$d\pi(t) = a(t)dS(t) - b^-(t)d\beta(t) + a(t)S(t)q(t)dt = \{R(t)\pi(t) + a(t)S(t)(u(t) - R(t))\}dt + a(t)S(t)\sigma(t)dW(t).$$

$$\text{令 } \xi = \frac{u(t) - R(t)}{\sigma(t)}, \text{ 若 } E_P \left[\exp \left\{ \int_0^T \frac{u(t) - R(t)}{\sigma(t)}^2 dt \right\} \right] <$$

∞ , 由引理知道存在唯一等价鞅测度 Q_2 满足 $\frac{dQ_2}{dP} =$

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^T \xi^2(s)ds - \int_0^T \xi(s)dW(s) \right], W^{Q_2}(t) = W(t) +$$

$\int_0^t \xi(s)ds$, $W^{Q_2}(t)$ 是关于 Q_2 的标准布朗运动, 则

$$d\pi(t) = R(t)\pi(t) + a(t)S(t)\sigma(t)\{\xi(t)dt + dW(t)\} = R(t)\pi(t) + a(t)S(t)\sigma(t)dW^{Q_2}(t)$$

于是在金融市场 M 中, 当财富过程 $\pi(t)$ 为幂型欧式看涨期权的定价 $c(t)$ 时有

$$c(t) = E_{Q_2} \left[\exp \left\{ -\int_t^T \xi(s)ds \right\} (S_T^a - K)^+ \mid F_t \right] = \beta^{-1}(T) E_{Q_2} [(S_T^a - K)^+ \mid F_t] \quad (2)$$

由于看涨期权预期将来的股价会上涨, 对于理性投资者来说应全部持有股票, 而不应持有债券, 所以 $b(t) < 0$, 因此在借贷利率不同情况下, 幂型欧式看涨期权的定价为式 (2).

定理 1 具有不同借贷利率的幂型欧式看跌期

权的定价为

$$p(t) = K \exp \left\{ - \int_t^T \alpha(s) ds \right\} N(-d_2^*) - S_t^\alpha \exp \left\{ \int_t^T (\alpha - 1)r(s) - \alpha q(s) + \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} \sigma^2(s) ds \right\} N(-d_1^*)$$

$$\text{其中, } d_1^* = \frac{\ln \frac{S_t^\alpha}{K} + \int_t^T \alpha(r(s) - q(s)) + \left(\alpha^2 - \frac{\alpha}{2} \right) \sigma^2(s) ds}{\sqrt{\int_t^T \alpha^2 \sigma^2(s) ds}}, d_2^* = \frac{\ln \frac{S_t^\alpha}{K} + \int_t^T r(s) - q(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}}.$$

证明 由 $ds(t) = S(t) \{ (u(t) - q(t)) dt + \sigma(t) dW(t) \}$ 得

$$S_T = S_t \exp \left\{ \int_t^T \left(u(s) - q(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right) ds + \int_t^T \sigma(s) dW(s) \right\} = S_t \exp \left\{ \int_t^T \left(r(s) - q(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right) ds + \int_t^T \sigma(s) dW^{Q_1}(s) \right\},$$

令 $A_0 = \left\{ S_T^\alpha < K \right\} = \left\{ \ln \frac{S_T^\alpha}{S_t^\alpha} < \ln \frac{K}{S_t^\alpha} \right\}$, 则

$$p(t) = B^{-1}(T) E_{Q_1} \left[(K - S_T^\alpha)^+ | F_t \right] = K E_{Q_1} \left[I_{A_0} | F_t \right] B^{-1}(T) - B^{-1}(T) E_{Q_1} \left[S_t^\alpha \exp \left\{ \alpha \left[\int_t^T r(s) - q(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} ds + \int_t^T \sigma(s) dW^{Q_1}(s) \right] \right\} | F_t \right]$$

因为

$$\begin{aligned} S_T^\alpha &= S_t^\alpha \exp \left\{ \alpha \left[\int_t^T r(s) - q(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) ds + \int_t^T \sigma(s) dW^{Q_1}(s) \right] \right\} = \\ &S_t^\alpha \exp \left\{ \int_t^T \alpha r(s) - \alpha q(s) - \frac{1}{2} \alpha \sigma^2(s) + \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2(s) ds \right\} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma^2(s) ds + \int_t^T \sigma(s) dW^{Q_1}(s) \right\} = \\ &S_t^\alpha \exp \left\{ \int_t^T \alpha r(s) - \alpha q(s) - \frac{1}{2} \alpha \sigma^2(s) + \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2(s) ds \right\} \mu_T \\ \mu_T &= \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma^2(s) ds + \int_t^T \sigma(s) dW^{Q_1}(s) \right\} \end{aligned}$$

令 $dW^{Q_1}(s) = dW^{Q_3}(s) + \alpha \sigma(s) ds$, 若 $E_P \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2(s) ds \right\} \mu_T \right] < \infty$, 由引理可知

$W^{Q_3}(t)$ 为 Q_3 测度下的标准布朗运动, 其中风险中性概率测度 Q_3 与风险中性概率测度 Q_1 是等价鞅测度, 在 Q_1 下相对于自然布朗运动信息集合 μ_T 是鞅过程^[8], 且在 Q_1 下 $\mu_T I_{A_0}$ 的期望值可以转化为 Q_3 下 I_{A_0} 的期望值. 所以

$$\begin{aligned} p(t) &= B^{-1}(T) \left\{ K Q_1(A_0) - S_t^\alpha \exp \left\{ \int_t^T \alpha(r(s) - q(s)) + \frac{(\alpha^2 - \alpha)\sigma^2(s)}{2} ds \right\} \times \right. \\ &\quad \left. E_{Q_1} \left[\exp \left\{ \int_t^T \frac{\alpha^2}{2} \sigma^2(s) ds + \int_t^T \sigma(s) dW^{Q_1}(s) \right\} | F_t \right] \right\} = \\ &B^{-1}(T) \left\{ K Q_1(A_0) - S_t^\alpha \exp \left\{ \int_t^T \alpha(r(s) - q(s)) + \frac{(\alpha^2 - \alpha)\sigma^2(s)}{2} ds \right\} E_{Q_3} [I_{A_0}] \right\} = \\ &B^{-1}(T) \left\{ K Q_1(A_0) - S_t^\alpha \exp \left\{ \int_t^T \alpha(r(s) - q(s)) + \frac{(\alpha^2 - \alpha)\sigma^2(s)}{2} ds \right\} Q_3(A_0) \right\} = \\ &B^{-1}(T) K Q_1 \left[\frac{\int_t^T \sigma(s) dW^{Q_1}(s)}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}} < \frac{\ln \frac{K}{S_t^\alpha} - \int_t^T \alpha(r(s) - q(s)) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}} \right] - B^{-1}(T) S_t^\alpha \times \\ &\exp \left\{ \int_t^T \alpha[r(s) - q(s)] + \frac{(\alpha^2 - \alpha)\sigma^2(s)}{2} ds \right\} \times \\ &Q_3 \left[\frac{\int_t^T \sigma(s) dW^{Q_3}(s)}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}} < \frac{\ln \frac{K}{S_t^\alpha} - \int_t^T \alpha[r(s) - q(s)] + \left(\alpha^2 - \frac{\alpha}{2} \right) \sigma^2(s) ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}} \right] \end{aligned}$$

由于

$$\frac{\int_t^T \sigma(s) dW^{Q_1}(s)}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}} \sim N(0, 1), \quad \frac{\int_t^T \sigma(s) dW^{Q_3}(s)}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}} \sim N(0, 1),$$

所以

$$\begin{aligned} p(t) &= B^{-1}(T) \left[KN(-d_2^*) - S_t^\alpha \exp \left(\int_t^T \left[\alpha(r(s) - q(s)) + \frac{(\alpha^2 - \alpha)\sigma^2(s)}{2} \right] ds \right) N(-d_1^*) \right] = \\ &= K \exp \left(- \int_t^T (s) ds \right) N(-d_2^*) - S_t^\alpha \exp \left(\int_t^T \left[(\alpha - 1)r(s) - \alpha q(s) + \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} \sigma^2(s) \right] ds \right) N(-d_1^*) \\ d_1^* &= \frac{\ln \frac{S_t^\alpha}{K} + \int_t^T \left[\alpha(r(s) - q(s)) + \left(\alpha^2 - \frac{\alpha}{2} \right) \sigma^2(s) \right] ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}} \\ d_2^* &= \frac{\ln \frac{S_t^\alpha}{K} + \int_t^T \left[r(s) - q(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right] ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}} \end{aligned}$$

定理 2 具有不同借贷利率的幂型欧式看涨期权的定价为

$$\begin{aligned} c(t) &= S_t^\alpha \exp \left(\int_t^T \left[(\alpha - 1)R(s) - \alpha q(s) + \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} \sigma^2(s) \right] ds \right) N(d_1) - K \exp \left(- \int_t^T (s) ds \right) N(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln \frac{S_t^\alpha}{K} + \int_t^T \left[\alpha(R(s) - q(s)) + \left(\alpha^2 - \frac{\alpha}{2} \right) \sigma^2(s) \right] ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}}, \\ d_2 &= \frac{\ln \frac{S_t^\alpha}{K} + \int_t^T \left[R(s) - q(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right] ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}} \end{aligned}$$

证明与定理 1 相仿, 不再赘述.

推论 1 当 $r(t) = R(t)$ 时, $c(t)$ 与 $p(t)$ 为文 [1] 中结论. 可见本文是文 [1] 的推广.

推论 2 当 $\alpha = 1$ 时, $c(t)$ 与 $p(t)$ 为文 [2] 中定理 1 结论. 可见本文是文 [2] 的推广.

推论 3 当 $\alpha = 1, u(t) = u, r(t) = R(t) = r, q(t) = 0, \sigma(t) = \sigma$ 时, u, r, σ 为常数, $c(t)$ 与 $p(t)$ 为原始的 Black-Scholes 公式. 由此可见本文是 Black-Scholes 公式的又一推广.

由定理 1 与定理 2 可知, 不同借贷利率的幂型欧式看跌期权的定价与无风险利率有关, 而与贷款利率无关, 不同借贷利率的幂型欧式看涨期权的定价与贷款利率有关, 而与无风险利率无关.

参考文献:

- [1] 白斐斐, 师 格. 具有连续红利的幂型欧式期权定价 [J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(12): 33 - 36.

- [2] 薛 红. 具有不同借贷利率的欧式未定权益定价模型 [J]. 应用数学, 2001, 14(S1): 30 - 35.
[3] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
[4] BLACK F, SCHOLES M. The Pricing of Option and Corporate Liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637 - 654.
[5] BAXTER. Financial Calculators [M]. England: Cambridge University Press, 1996.
[6] GEMAN H, EL KARON I N, ROCHER J C. Changes Numeraire, Changes of Probability and Option Pricing [J]. Journal of Applied Probability, 1995 (32): 443 - 458.
[7] JAMSHIDIAN F. An Exact Bond Option Journal of Formula [J]. Finance, 1989 (44): 205 - 209.
[8] 孔繁亮. B 值渐近鞅的强弱大数定律 [J]. 数学学报, 1998, 41(3): 667 - 672.

(编辑: 温泽宇)